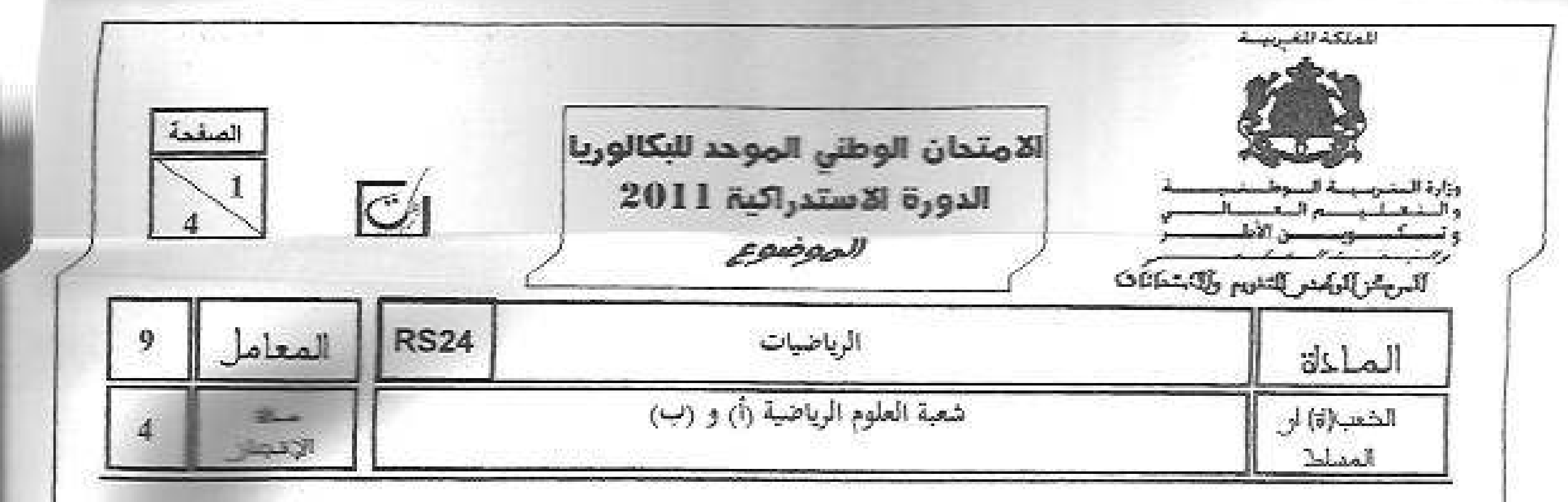

المملكة المغربية

وزارة التربية الوطنية والتعليم العالي وتكوين الأطر والبحث العلمي

المركز الوطني للتقويم والامتحانات

الامتحان الوطني الموحد للبكالوريا

الدورة الاستدراكية 2011

الموضوع

المادة	الرياضيات	RS24	المعامل	9
الشعب(ة) أو المسلك	شعبة العلوم الرياضية (أ) و (ب)		مدة الإنجاز	4

- مدة إنجاز الموضوع هي أربع (4) ساعات.
- يتكون الموضوع من خمسة تمارين مستقلة فيما بينها .
- يمكن إنجاز التمارين حسب الترتيب الذي يرغب فيه المترشح.

- التمرين الأول يتعلق بالبنيات الجبرية......................(3.5 ن)
- التمرين الثاني يتعلق بالحسابيات ....(2.5ن)
- التمرين الثالث يتعلق بالأعداد العقدية..................... (4ن)
- التمرين الرابع يتعلق بالتحليل............................(6 ن)
- التمرين الخامس يتعلق بالتحليل..........................(4 ن)

يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة

لا يسمح باستعمال اللون الأحمر بورقة التحرير

التمرين الأول: (3.5 نقط)

لكل x و y من المجال $I=]0,1[$ نضع: $x*y=\dfrac{xy}{xy+(1-x)(1-y)}$

1- أ) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في I . 0.5ن

ب) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي. 0.5ن

ج) بين أن $(I,*)$ يقبل عنصرا محايدا يتم تحديده. 0.5ن

2- بين أن $(I,*)$ زمرة تبادلية. 0.5ن

3- نعتبر المجموعتين $H=\{2^n / n\in\mathbb{Z}\}$ و $K=\left\{\dfrac{1}{1+2^n} / n\in\mathbb{Z}\right\}$

أ) بين أن H زمرة جزئية للزمرة $(\mathbb{R}_+^*,\times)$ 0,5 ن

ب) نعتبر التطبيق : $\varphi : H\to I$ ، $x\mapsto \dfrac{1}{1+x}$. بين أن φ تشاكل من $(H,\times)$ نحو $(I,*)$ 0,5 ن

ج) استنتج أن K زمرة جزئية للزمرة $(I,*)$ 0.5ن

التمرين الثاني: (2.5 نقط)

ليكن x عددا صحيحا طبيعيا يحقق: $10^x\equiv 2\ [19]$

1- أ) تحقق أن: $10^{x+1}\equiv 1\ [19]$ 0.25ن

ب) بين أن: $10^{18}\equiv 1\ [19]$ 0.5ن

2- ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين 18 و $x+1$

أ) بين أن: $10^d\equiv 1\ [19]$ 0.75ن

ب) بين أن: $d=18$ 0.5ن

ج) استنتج أن: $x\equiv 17\ [18]$ 0.5ن

التمرين الثالث: (4 نقط)

الجزء الأول: نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة: $(E) \quad z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$

0.5ن 1- تحقق أن العدد $-2i$ حل للمعادلة (E)

0.5ن 2- حدد العددين العقديين α و β بحيث:

$$(\forall z\in\mathbb{C}) \ : \ z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=(z+2i)(z^2+\alpha z+\beta)$$

0.5ن 3- أ) حدد الجذرين المربعين للعدد $5-12i$

0.5ن ب) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة (E)

الجزء الثاني: المستوى العقدي منسوب لمعلم متعامد ممنظم مباشر.

نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي هي: $a=-1+3i$ و $b=-2i$ و $c=2+i$

0.5ن 1- بين أن المثلث ABC قائم الزاوية ومتساوي الساقين في C

2- نعتبر الدوران R_1 الذي مركزه B وزاويته $\frac{\pi}{3}$ و الدوران R_2 الذي مركزه A و زاويته $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$

لتكن M نقطة من المستوى العقدي لحقها z و M_1 صورتها بالدوران R_1 و M_2 صورتها بالدوران R_2

0.5ن أ) تحقق أن الصيغة العقدية للدوران R_1 هي: $z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$

0.5ن ب) حدد z_2 لحق M_2 بدلالة z

0.5ن ج) استنتج أن النقطة I منتصف القطعة $[M_1M_2]$ ثابتة.

التمرين الرابع: (6 نقط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي: $f(x)=x+\ln x$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$. (نأخذ: $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1ن 1- احسب النهايات التالية: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$

0.25ن 2- أ) ضع جدول تغيرات الدالة f

0.75ن ب) بين أن الدالة f تقابل من المجال $]0,+\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ، ثم ضع جدول تغيرات التقابل العكسي f^{-1} .

0.75ن 3- احسب $f(1)$ و $f(e)$ ثم أنشئ (C) و (C') منحنى الدالة f^{-1} في نفس المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5ن 4- أ) احسب التكامل $\int_1^{e+1} f^{-1}(x)dx$ (يمكنك وضع: $t=f^{-1}(x)$)

0.5ن ب) استنتج مساحة حيز المستوى المحصور بين (C') و المستقيمات ذات المعادلات: $x=1$ و $x=e+1$ و $y=x$

5- نعتبر المعادلة : $(E_n)\ :\ x+\ln x=n$

0.25ن | أ) بين أن المعادلة (E_n) تقبل حلا وحيدا x_n

0.5ن | ب) حدد قيمة x_1 ثم بين أن: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

0.5ن | 6- أ) بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad f(x_n)\leq f(n)$ ثم استنتج أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad x_n\leq n$

0.5ن | ب) بين أن $(\forall n\in\mathbb{N}^*)\quad n-\ln(n)\leq x_n$

0.5ن | ج) احسب النهايتين: $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-n}{n}$ و $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n-\ln(n)}$

التمرين الخامس:(4 نقط)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم و f_n الدالة الحدودية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+\dots\dots\dots+\frac{x^n}{n}$$

0.5ن | 1- بين أنه من أجل $n\geq 2$ يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,1[$ بحيث: $f_n(\alpha_n)=0$

0.75ن | 2- بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.(نضع $\ell=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$)

0.5ن | 3- أ) تحقق أنه من أجل $t\neq 1$ لدينا : $1+t+t^2\dots\dots\dots+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$

0.5ن | ب)استنتج أن: $\alpha_n+\dfrac{\alpha_n^2}{2}+\dots\dots\dots+\dfrac{\alpha_n^n}{n}=-ln(1-\alpha_n)-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5ن | 4- أ) بين أن: $1+ln(1-\alpha_n)=-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5ن | ب) بين أن: $0\leq\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt\leq\frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}\qquad(\forall n\geq 2)$

0.75ن | ج)استنتج أن: $\ell=1-e^{-1}$

انتهى